简版代数结构

Starker-first　PB20000328

2022.2

Contents

1 集合论 **5**

1.1 集合的定义方式 5

1.2 集合的运算 5

1.3 幂集和积集 5

2 映射与关系 **7**

2.1 映射 7

2.2 有限集上的双射——置换 7

2.3 关系 9

2.3.1 关系的概念 9

2.3.2 等价关系 9

2.3.3 序关系 9

2.4 集合的势 10

3 群 **11**

3.1 群的定义与内禀性质 11

3.1.1 定义 11

3.1.2 性质 11

3.1.3 子群 12

3.1.4 共轭 12

3.2 商群 13

3.2.1 陪集与Lagrange Thm 13

3.2.2 正规子群与商群 14

3.3 群间关系 15

3.3.1 同构 15

3.3.2 同态 16

3.4 群作用 17

3.5 几种常见的群 18
3.5.1 低阶群简介 18
3.5.2 循环群 18
3.5.3 置换群 18
3.5.4 具体分析——S_4 19

4 环 **23**
4.1 环的定义与内禀性质 23
4.1.1 定义 23
4.1.2 性质 23
4.1.3 子环 24
4.2 整环和域 24
4.3 理想与商环 24
4.4 多项式环 24
4.5 环同态 25

5 格 **27**

6 数论初步 **29**

Chapter 1

集合论

集合的基本性质不做赘述。

1.1 集合的定义方式

集合的定义有三种方式:

1. 穷举元素
2. 描述元素整体性质
3. 归纳定义（基础语句，归纳语句，终结语句）

其中3方式比较适用于指令生成，基础语句提供基本建筑块，应尽可能少；归纳方法应简单可行；终结语句提供归纳完备性。

1.2 集合的运算

规则不再说明。核心是几何venn图和布尔逻辑代数的内在联系（集合的特征函数）。

1.3 幂集和积集

集合的集合称为集族。一个集合所有子集构成的集族称为幂集。显然有$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$。

定义 1.3.1. n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$的积集是有全体有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$构成的集合，其中$a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n$。全相等时记为$A^n$。

定理 1.3.2. 对于有限集合有$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$

积集可以构造大型数组或者数据库，几何上可以构造坐标系。积集不具有交换律。

Chapter 2

映射与关系

2.1 映射

了解满射，单射，双射的概念。

映射的合成是映射群的基本运算。

定理 2.1.1. $f^{-1} \circ f = I$

定理 2.1.2. 映射的合成满足结合律

定理 2.1.3. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

本节还有一些很平凡的定理，不做赘述。

2.2 有限集上的双射——置换

注：无限集上双射属于变换，例如线性空间上的线性变换。

变换在很多学科都有重要应用，其重要性体现于将问题进行等价转换和视角切换，以获得清晰直观简化的条件，例如*Legendre*变换，*H-J*变换，*Lagrange*变换等。当然，变换的作用也体现于“变”之中，即映射，这是它的内禀含义，例如线性变换，置换等。

定义 2.2.1. 从A到自身的双射称为A上的置换。若$|A| = n$，则称为n元置换，记作

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$$

在置换中，我们只关心各元素相对位置的变化，而不是具体元素，故我们将集合记为$\{1, 2, \cdots, n\}$。

定义 2.2.2. 若有

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_r & a_1 \end{pmatrix}, 2 \leq r \leq n$$

且除去这r个元素的其他元素不动，则称其其为长度为r的轮换，记作

$$\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

定理 2.2.3. 不相交的轮换可交换。

定理 2.2.4. 每个置换都可以写成若干个不相交轮换合成且唯一。

这个thm说明置换可以分区，且是漂亮的移位变换。可由数学归纳法和有限置换的阶数有限性证明。

因此，置换可以有多种表示方法:

1. 定义表示

2. 不相交轮换之积

3. 连连看图

4. 置换矩阵

其中*2*适合证明，*3*可以通过数交点数来判断奇偶性，*4*可以使用矩阵乘法计算复合置换。

注：4可以使用矩阵乘法运算的理由是可以将S_n嵌入到$GL_n(F)$上，这里我们把置换看做R_n上的线性变换，即把$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$整体看做坐标了。

定理 2.2.5. 置换的阶数是轮换分解各因子长度的最小公倍数。

由分区性和轮换阶数平凡显然得到。

由于置换合成相当于奇偶同余类相加，故对于奇偶性，我们有:

引理 2.2.6. 轮换奇偶性同1+轮换长度，特别对于下面的轮换是奇置换。

定理 2.2.7. 置换的奇偶性同n+轮换个数。

只有两个元素的轮换叫对换。

定理 2.2.8. 任何轮换可表示为对换合成，但不唯一。

例 2.2.9. $(l, k) = (1, l)(1, k)(1, l)$

定理 2.2.10. 对换是奇置换。

定理 2.2.11. 奇置换分解为奇数个对换因子合成，偶置换分解为偶数个对换因子合成。

引理 2.2.12. 一个置换与$(i \quad i+1)$因子合成得到奇偶性相反的置换，可以构造双射。

定理 2.2.13. n元置换群中奇偶置换各占$\frac{n!}{2}$。

定理 2.2.14. 可以构造奇偶置换分别到± 1的同态映射

由以上thm可知，任何置换、任何轮换、任何对换可以相互表示。

2.3 关系

2.3.1 关系的概念

定义 2.3.1. $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集称为$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$上的一个$n$元关系$R$。特别的，$n = 2$时称为二元关系，即若$(a, b) \in R$，则称$a$与$b$有二元关系$R$，记为$aRb$。

关系可用关系矩阵和关系图表示，可以直观得到自反性、对称性、传递性等性质。　　关系是基于集合定义的，当然可以定义交并补、比较、合成运算。

定义 2.3.2. 性质闭包 略

2.3.2 等价关系

定义 2.3.3. 集合A上的**自反、对称、传递**关系称为等价关系。

等价关系有天然的分区性。

定义 2.3.4. R为等价关系，则

$$[a] = \{x | x \in A, aRx\}$$

称为元素a所属的等价类，a为代表元。

定理 2.3.5. 等价类集合是A上的一个**划分**，也称为A关于R的商集合（后面还会讨论商），即$\{[a] | a \in A\}$。

定理 2.3.6. 给定集合划分也能得到一个等价关系$R : xRy \Leftrightarrow$存在i，使$x \in A_i, y \in A_i$

2.3.3 序关系

定义 2.3.7. 集合A上的**自反、反对称、传递**关系称为部分序关系，记部分序集为$\langle A, \rho \rangle$。

当然，不是所有元素之间都有关系，即不是总能比较。称全部元素可比较的关系为完全序关系，在关系矩阵中体现为强反对称性。

既然能够排序，就一定有极值与最值的概念。在此之前我们先引入控制元素的概念。

定义 2.3.8. 不存在$z \in A$使得$x\widetilde{\rho}z, z\widetilde{\rho}y$，则称$y$控制$x$，记作$x\overset{\circ}{\rho}y$。

定理 2.3.9. 对于有限集，x要么是极大元，要么就会被控制。无限集没有此定理。对极小也是同样的。

据此，我们可以画出$Hasse$图以表示序关系，$Hasse$图拓扑等价的集合为序同构。

最大元与极大元有紧密联系:

定理 2.3.10. 部分序集最大元必是极大元，且必唯一。

定理 2.3.11. 最大元存在当且仅当极大元唯一。

还可以定义上下界，显然存在性唯一性不能保证。

2.4 集合的势

集合的势是用来衡量集合规模大小的通法。特别的，对于有限集，可以用元素个数直接说明。

定义 2.4.1. 存在A到B双射，则称等势。这是一种集族上的等价关系。

定义 2.4.2. 与自然数集合的断片$|0, n|$等势的集合是有限集合，与$\mathbb{N}$等势的集合是可数无限集合，其余为不可数集合。

定理 2.4.3. 任何有限集合不能和其真子集等势，但无限集总可以与自己的一个真子集等势。

定理 2.4.4. 每个无限集合都含有可数无限子集,即子列存在。

势可以定性比较大小。

定义 2.4.5. A与B的子集等势，则A的势$\leq B$的势，也叫B支配A。

定理 2.4.6. 集族中集合间的支配关系是部分序关系。

Chapter 3

群

3.1 群的定义与内禀性质

3.1.1 定义

定义 3.1.1. 在非空集合G上定义运算$*$，若满足

1. 乘法封闭
2. 乘法结合
3. 乘法单位元存在（其实多余）
4. 乘法逆元全存在

则称G连同$*$为一个群，记为$\langle A, * \rangle$。若乘法可交换，则为$Abel$群。

以上定义也可以用加法系列描述。

群有等价定义，我们一并归入性质中。

3.1.2 性质

1. 左右消去律*(*等价定义*)(*之后在第四章中还会讨论*)*
2. 单位元与逆元唯一
3. $(a')' = a$
4. $(a * b)' = b' * a'$
5. 左单位元一定是右单位元，左逆一定是右逆。*Vice versa.(*等价定义*)*

定义 3.1.2. 群的运算规则可以用群表来表示。

定理 3.1.3. 群表中每个元素出现且只出现一次，且不可能出现在自己的对角元上，即算符$\boldsymbol{b*}, b \in A$是一个双射（置换）。

这是群很特殊的结构。

定理 3.1.4. 有限群的元素的阶总是有限的。

有限群总会因为有限（取值受限）而产生一些循环上的性质，尤其是高次映射。

3.1.3 子群

定义 3.1.5. 群G的非空子集H，若满足**乘法封闭**和**逆元均存在**，即删去*2'*与*3'*，则称H为G的子群，记为$H \leq G$。

定理 3.1.6. 若H为有限集，则只需要**乘法封闭**即可。

显然子群的要求很强，封闭性需要大刀阔斧才能得到。（思考子空间）

我们可以构造一个平凡子群

$$H = \{a^0, a^1, \cdots, a^m - 1\}$$

3.1.4 共轭

定义 3.1.7. 对于$x, y \in G$，若$\exists g \in G, x = gyg^{-1}$，则称$x, y$**共轭**。

定义 3.1.8. 对于$H_1, H_2 \leq G$，若$\exists g \in G, H_1 = gH_2g^{-1}$，则称$H_1, H_2$**共轭**。

定理 3.1.9. 共轭是等价关系。

定理 3.1.10. 自共轭是平凡的。

定理 3.1.11. 共轭的两个群同构。

引理 3.1.12. 共轭元素的阶相同。

一个子群共轭的群应该有很多，只要g变化，所以可以将这一步看成群变换。但是对于正规子群，这是唯一的（滑稽）。

如果群与子群的元素个数有一些特殊性，那么我们就有一些特殊结果。

定义 3.1.13. 若$|G| = p^\alpha \bullet m, \alpha \in \mathbb{N}^+, p \nmid m, p$是素数，若$H$是$G$子群且$|H| = p^\alpha$，则称$H$是$G$的$p-sylow$。

定理 3.1.14. *(sylow thm)*

1. 有限群存在$p-sylow$。

2. 有限群的所有$p-sylow$互相共轭。

3. $p-sylow$的个数N_p有$N_p \equiv 1 \pmod{p}, N_p | m$。

在对称群里，我们有这样一个定理:

引理 3.1.15. $\sigma \circ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \cdots, \sigma(a_n))$

定理 3.1.16. S_n中两个元素共轭当且仅当他们的不相交轮换之积分解出的轮换长度对应相等。

我们最后介绍中心化子的概念:

定义 3.1.17. 对于$g \in G$，所有与之可交换的元素的集合称为**中心化子**，记作$C_G(g)$。

定理 3.1.18. $C_G(g)$是G的子群。

3.2 商群

为了进一步探究群的结构，我们需要研究子群的作用。

3.2.1 陪集与Lagrange Thm

定义 3.2.1. H如前定义。若$\forall a, b \in G, a * b' \in H$，则称$a$与$b$模$H$同余，记作$a \equiv b\,(mod H)$。

必须说明的是，这个定义是自然数集上定义的同余关系的抽象：运算*取成加法，令$H = nZ$，此时$a + (-b) \in nZ$。

定理 3.2.2. 模H同余关系是等价关系，等价类为

$$Ha = \{h * a | h \in H\}$$

称为H的**右陪集**，a为代表元($[a]$)。分划完全取决于H。

陪集有如下性质。

定理 3.2.3. *1.*$He = H$　*2.*$a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow Ha = Hb$　*3.*$a \in H \Leftrightarrow Ha = H$

可以定义左陪集aH，只要把定义*3.2.1*修改即可，本质不变。

定理 3.2.4. 左陪集集合$S_L = \{aH | a \in G\}$与右陪集集合$S_R = \{Ha | a \in G\}$等势。

定义 3.2.5. $|S_R|$称为H在G中的**指数**，是H的性质体现，记作$[G : H]$。

定理 3.2.6. *(Lagrange)* 若G是有限群，则

$$|G| = [G : H] |H|$$

证明：由H与Ha等势（显然构造双射）和分划的性质得

$$\begin{aligned} |G| &= |Ha_1| + |Ha_2| + \cdots + |Ha_n| \\ &= k |H| \\ &= [G : H] |H| \end{aligned}$$

我们可以得到推论

引理 3.2.7. 元素的阶＜集合的阶

推论 3.2.8. 所有子群的大小必整除$|G|$

推论 3.2.9. 所有元素的阶必整除$|G|$ *(由元素构造的平凡子群证)*

推论 3.2.10. 素数阶

3.2.2 正规子群与商群

定义 3.2.11. 若$\forall g \in G, h \in H$有$g' * h * g \in H$，则称H为正规子群，记为$H \lhd G$。

定理 3.2.12. 等价定义：$\forall g \in G \quad Hg = gH$

定理 3.2.13. 指数为2的子群是正规子群。

定理 3.2.14. *Abel*群的任意子群是正规子群。

定理 3.2.15. 正规子群仅与自己共轭。

正规子群和陪集是为了定义商群存在的。

定义 3.2.16. N是正规子群，则$\langle \{Ng | g \in G\}, * \rangle$是群，称为$G$模$N$的**商群**，记为$G/N$，其中$*$是集合乘法，对陪集来说有$Ng_1 * Ng_2 = N(g_1 * g_2)$。

可以看出正规子群是子群的更强性质。对一般的子群，只能给出所有陪集构成的集合$\{Ng | g \in G\}$，而对正规子集，这个集合就可以给出群结构了。

注：其实有比正规子群还要强的子群——特征子群。

定义 3.2.17. 在G上的任意自同构映射，限制在H上还是自同构映射，称H为**特征子群**。

定理 3.2.18. 特征子群都是正规子群。

关于特征子群的讨论到此为止。

在这里我们可以讨论一下商的概念。从商集合和商群的概念中可以看出，商具有分划切割之意，即各个等价类独自组成一个元素来构成集合。在最简单的同余类Z/nZ中就是$[0],[1],\cdots,[n-1]$，就像是nZ将整个Z割成周期排列的n个集合。而这个等价类的分割方法直接取决于H。

我们可以通过下面这张图直观理解商空间的定义，下图中每个子集合都代表了一个等价类，这些等价类的集合即为商空间。

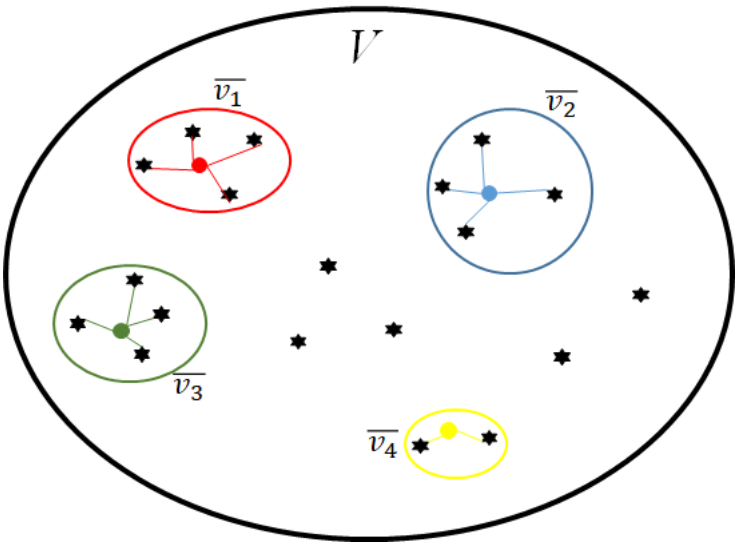


Figure 3.1: 商空间的直观理解（来自知乎）

由*Lagrange Thm*，$|G/N| = |G| / |H|$。

3.3 群间关系

3.3.1 同构

对于两个元素截然不同的群，我们往往不关心具体元素，而关心其元素关系结构。如果结构相同，我们说他们同构，而结构取决于运算$*$（可从群表得到）。

定义 3.3.1. 若在群G_1, G_2间存在**双射**ϕ，有

$$\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b) \quad \forall a \in G_1, b \in G_2$$

称G_1, G_2**同构**。

定理 3.3.2. $1.\phi(e_1) = e_2 \qquad 2.\phi(a') = \phi(a)' \quad \forall a \in G_1$

只要存在一个同构映射就同构，所以很多时候重点在于找到这样一个双射。

定理 3.3.3. 同构是等价关系。

我们有很多自然但又重要的同构关系，比如后面的*Cayley Thm*。

由同构可以直接确立集合上的群结构。

定理 3.3.4. 若在群G_1和集合G_2间存在同构映射，则G_2是群。

3.3.2 同态

定义 3.3.5. 若在群G_1, G_2间存在**映射**ϕ，有

$$\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b) \quad \forall a \in G_1, b \in G_2$$

称G_1, G_2**同态**。

同态是同构的弱化性质，其不是等价关系，也说明不了两个群结构相似，只是保持群结构的映射，同时和两边的群结构兼容，所以同态只是找到了特殊映射，对于群本身来说倾向于平凡性质，不是很强。

定理 3.3.6. 对于同态也有 $1.\phi(e_1) = e_2$ $2.\phi(a') = \phi(a)' \quad \forall a \in G_1$

由于不是双射，我们定义打在单位元上的元素集合为$\mathrm{Ker}\, f$，由于单位元的特殊性，这个集合就很重要。

定理 3.3.7. $\mathrm{Ker}\, f$是G_1的正规子群。

定理 3.3.8. f为单射当且仅当$\mathrm{Ker}\, f$平凡。

定理 3.3.9. $f^{-1}(f(a)) = a\mathrm{Ker}\, f \quad \forall a \in G_1$

这样看来f的像的原像集是关于同态核的一个陪集，即$G_1/\mathrm{Ker}\, f$与$\mathrm{Im}\, f$建立了一一对应关系，即*kernel*将G_1分成一块块与像对应的集合，我们可以证明像集上面有群结构且与商群同构。

定理 3.3.10. *(*群同态基本定理*)* $G_1/\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im}\, f$

反过来，我们还可以说:

定理 3.3.11. 群的任何商群都存在商映射，使其是同态像，此时这个同态的*kernel*是被商掉的那个正规子群。

这两个*thm*实质上是两种视角间的灵活转换，考虑它同态像的时候，可以把它当做一个商群来考虑，研究一个商群的结构时，也可以把它看成是某一个同态映射的像来考虑，这个映射$\phi(a') = aH$，被称为自然同态（分划很平凡）。

保持群结构兼容使得同态在子群传递性上有特殊性。

定理 3.3.12. *f*是同态映射

1. $H_1 \leq G_1 \Rightarrow f(H_1) \leq G_2$
2. $H_1 \lhd G_1 \Rightarrow f(H_1) \lhd f(G_1)$
3. $H_2 \leq f(G_1) \Rightarrow f^{-1}(H_2) \leq G_1$
4. $H_2 \lhd f(G_1) \Rightarrow f^{-1}(H_2) \lhd G_1$

可以看到，$f(G_1)$区域内和G_1区域有很好的子群传递性。

引理 3.3.13. 若*f*是满同态映射，则$H_1 \lhd G_1 \Rightarrow f(H_1) \lhd G_2$

3.4 群作用

定义 3.4.1. X是集合，左作用$G \times X \to X : (g, x) \to g \bullet x$，其中$\bullet$满足$e \bullet x = x$和$(g_1 * g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x)$。

定理 3.4.2. $G \to S(x)$同态，这是等价定义。

实质就是建立起$G \to S(x)$的一个代表关系，用G来表示映射。

例 3.4.3. G自作用，$g \bullet h = g * h$。

例 3.4.4. G自共轭作用，$g \bullet h = g * h * g^{-1}$。

由于同态是不完全操控，所以会出现不是一一映射的情况。

定义 3.4.5. 轨道$Orb(x) = \{y \in X | \exists g \in G, y = g \bullet x\}$　即x的所有运算的结果集。

定义 3.4.6. 稳定化子$Stab(x) = \{g \in G | g \bullet x = x\}$　即使x不动的作用因子集。

定理 3.4.7. $Stab(x)$是G子群。

定理 3.4.8. $g \in G \quad Stab(x) = gStab(g \bullet x)g^{-1}$，即**轨道上的稳定化子变换**。

由群同态基本定理可以得到*(*在X上加群结构*)*:

定理 3.4.9. 存在双射$\hat{g} \mapsto g \bullet x$使$G/Stab(x) \to Orb(x)$。

推论 3.4.10. $|C_G(g)| = \frac{|G|}{|O(g)|}$，$O(g)$是*g*所在共轭类。

除了群作用，我们还有环作用、域作用，定义大都相似，比如线性空间就是$Abel$群加上域作用得到的。

3.5 几种常见的群

3.5.1 低阶群简介

*1*至*3*阶群在同构的意义下唯一，分别记作G_1, G_2, G_3；对于四阶群，有两种结构，分别记作G_4, K_4，即$Z/6Z, S_3$,区别在于有无*6*阶元，即是否是循环群。

由*Lagrange Thm*可以推出：

推论 3.5.1. G_4只能是循环群C_4或是*Klein-4*群K_4。

推论 3.5.2. G_6必有G_3子群。

3.5.2 循环群

定义 3.5.3. 若每个元素都能写成某个固定元素的幂，这样的群称为循环群，即$\exists g \in G$fi$G = \{g^n | n \in \boldsymbol{Z}\}$，$g$为生成元，记为$\langle g \rangle$。

定理 3.5.4. 循环群必是*Abel*群。

当G为有限群时，元素必不为无限阶，所以有*:*

定理 3.5.5. $\forall g \in G, H = \{g^n | n \in \boldsymbol{Z}\}$都是有限循环群，即有限群必有子群是循环群(平凡循环子群)。

定理 3.5.6. 循环群的子群必为循环群。

定理 3.5.7. 在同构意义下循环群只有两类：若a无限阶，则$G \cong \langle \mathbb{Z}, + \rangle$；，若阶数为$n$，则$G \cong \langle Z_n, + \rangle$，$Z_n$为模$n$同余类集合。

由推论*3.2.8*可以推出：

推论 3.5.8. 素数阶群是循环群。

3.5.3 置换群

定义 3.5.9. n元全体置换构成集合S_n，在合成运算下构成群，称为n次**对称群**。当然我们可以一般定义：集合E上的全体双射构成的群是对称群。

定理 3.5.10. 集合的包含关系⇒对称群的包含关系。

定理 3.5.11. $E_1 \cong E_2$（双射b），则$S(E_1) \cong S(E_2)$（取双射$\sigma \to b \circ \sigma \circ b^{-1}$）。

定义 3.5.12. 对称群的子群称为**置换群**。

例 3.5.13. 等边三角形经旋转和反射使之三个顶点与原来的顶点重合的所有置换构成置换群，记为D_3，称为**三次二面体**。

定理 3.5.14. D_3中$H=\{\rho_0,\rho_1,\rho_2\}$是正规子群，指数为2，且$D/H$是2阶循环群。

例 3.5.15. 正方形经旋转和反射使之三个顶点与原来的顶点重合的所有置换构成置换群，记为D_4，称为**四次二面体**。有$D_4<S_4$。

对称群可以被生成元生成。

定理 3.5.16. S_n是$(1,2),(1,3),\cdots,(1,n)$的生成元系，即$S_n=\langle(1,2),(1,3),\cdots,(1,n)\rangle$。

当然这个不是唯一的，只要在顶点数为n的图G中形成一个连通图的所有边代表的对换族就可以生成对称群。 比如$S_n=\langle(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n)\rangle$。

在线性空间中，置换群与$\mathscr{L}$对应，类比对偶空间的思想（当然在有限情况下结论并不完全一致），我们有：

定理 3.5.17. *(Cayley)* 任意一个群都与一个置换群同构。

3.5.4 具体分析——S_4

共轭等价类

由*Thm* 3.1.11知， S_4有5个共轭等价类(从小到大)：

	4	*1+3*	*1+1+2*	*1+1+1+1*	*2+2*
capacity	*6*	*8*	*6*	*1*	*3*
example	*3 rotates*	*3 rotates*	*6 trades*	*id*	*(12)，(34)，(13)，(24)，(14)，(23)*
$\leq A_4$	*F*	*T*	*F*	*T*	*T*

我们还可以由中心化子个数公式得到每个元素的中心化子（不一一列举）。

S_4的子群

由*Lagrange Thm*知， S_4是*24*阶，故有*1/2/3/4/6/8/12/24*阶子群：

index	*1*	*2*	*3*	*4*
content	$\{id\}$	*6 trades,3(•)(•)-like*	*rotates of 3-index*	*4 kleins*
capacity	*1*	*9*	*4*	*4*
property	*trivial*	*adjoint*	*adjoint*	*isostructural*
p-sylow	*F*	*T*	*T*	*F*

index	*6*	*8*	*12*	*24*
content	*4 Stab*(•)	*3 Centralizers/*D_4	A_4	S_4 *itself*
capacity	*4*	*3*	*1*	*1*
property	*action:*$S_4 \mapsto \{1,2,3,4\}$	*adjoint*	*only,invariant*	*trivial*
p-sylow	*F*	*T*	*F*	*F*

定理 3.5.18. S_4有*30*个不同子群。

注：不是任何群按*Lagrange*定理分解得到的所有因子都有对应子群，S_4只是特殊。

S_4中有一个比较特殊的正规子群——K_4。

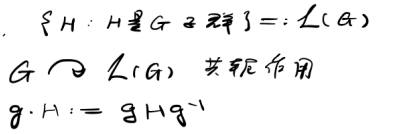
$$K_4 = \{id, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$$

定理 3.5.19. $K_4 \lhd A_4, K_4 \lhd S_4$

正规化子

定义 3.5.20. 正规化子 $N_G(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$，即是使*H*成为正规子群的最大元素范围，因此，当$N_G(H) = G$时，*H*正规。

为了研究S_4上的正规化子性质，我们做共轭作用 此时*Stab*是*H*的正规化子，*Orb*是*H*的共轭



等价类，由公式可得：

index	*1*	*2*	*3*	*4*	*6*	*8*	*12*	*24*
Normalizer	S_4	*all centralizers*	*6*	S_4	*itself*	*itself*	*itself*	*itself*

S_4商群的子群同构

定理 3.5.21. $N \lhd G$，则G/N*(*正规*)*子群一一对应于*G*的含*N*的*(*正规*)*子群。

定理 3.5.22. $S_4/K \cong S_3$

自同构群

定义 3.5.23. 取定$g \in G, I_g : h \to ghg^{-1}, \forall h \in G$称为内自同构映射，由定义有：内自同构映射

都是自同构映射。

定理 3.5.24. S_4上自同构映射都是内自同构映射。

自同构映射显然是满同态映射，所以有群同态基本定理，此时$Ker\,\phi = Z(S_4)$，$Z(S_4)$为中心。

Chapter 4

环

群论中只处理一种二元运算，在环论中我们处理两种二元运算和它们的关系。

4.1 环的定义与内禀性质

4.1.1 定义

定义 4.1.1. 在非空集合R上定义运算$*$与$+$，若满足

1. $\langle \mathbb{R}, + \rangle$是**交换群**
2. $\langle \mathbb{R}, * \rangle$是带*1*半群
3. 乘法对加法的左右分配律

则称$\langle \mathbb{R}, +, * \rangle$为**环**。若乘法可交换，则为交换环。

定义 4.1.2. $R = \{0\}$称为平凡环，此时$0 = 1$。

可以发现加法与乘法的地位不相同，且乘法逆元不一定存在。

定理 4.1.3. 环R中所有可逆元构成群。

4.1.2 性质

根据群的性质，我们可以基于此得到环的性质：

1. $a * 0 = 0 * a = 0$
2. $a * (-b) = (-a) * b = -(a * b)$
3. $(-a) * (-b) = a * b$

4.1.3 子环

定义 4.1.4. 环R的非空子集S，若满足

1. $\langle \mathbb{S}, + \rangle \leq \langle \mathbb{R}, + \rangle$
2. 乘法封闭
3. 乘法单位元存在

则称H为G的子环。

4.2 整环和域

定义 4.2.1. 对于非零元素$a \in R$，若$\exists b \in R$，使得$a * b = 0$，则称a为左零因子。右零因子同理。

由对称性，左零因子与右零因子同现或同无。

定理 4.2.2. R没有左右零因子当且仅当环有左右消去律。

定义 4.2.3. 没有零因子的交换环称为**整环**。

有消去律不代表有逆元存在，我们尝试在交换环的基础上补齐乘法逆元定义。

定义 4.2.4. 若交换环R上乘法逆元都存在，则称为域。

定理 4.2.5. 域上非零元素构成交换群。（等价定义）

下面揭示了域与整环的关系:

定理 4.2.6. 域是整环，有限整环是域。

4.3 理想与商环

略

4.4 多项式环

略

4.5 环同态

定义 4.5.1. 若在环R_1, R_2间存在**映射**f，有$\forall a \in R_1, b \in R_2$

1. $f(a * b) = f(a) * f(b)$
2. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
3. 乘法单位元映为乘法单位元

称R_1, R_2**同态**。

Chapter 5

格

略

Chapter 6

数论初步

暂时先略去，因为不是主干内容。